MATHEMATICS

EIN EINHEITLICHES VERFAHREN ZUR DEFINITION VON ABSOLUT- UND BEDINGT-KONVERGENTEN INTEGRALEN. IX.

VON

J. RIDDER

(Communicated at the meeting of September 28, 1968)

Der Fubinische Satz beim allgemeinen Riemann-Integral in R_2.

Die (schon in Teil IV, § 20) in $R_2 \equiv R'_1 \times R''_1$ betrachtete endlichwertige, beschränkt additive Segmentfunktion $\psi(\bar{\imath})$, von beschränkter Variation auf jedem Segment $\bar{\imath} \equiv \bar{\imath}' \times \bar{\imath}''$, mit $\bar{\imath}' \equiv \bar{\imath}'[a \leqq x \leqq b]$ und $\bar{\imath}'' \equiv \bar{\imath}''[c \leqq y \leqq d]$, sei hier spezialisiert:

$$\psi(\bar{\imath}) = \psi'(\bar{\imath}') \cdot \psi''(\bar{\imath}''),$$

wobei ψ' und ψ'' beschränkt additiv in R'_1 bzw. R''_1, und von beschränkter Variation in jedem zugehörigen linearen Segment.

Wie in IV, § 20 (diese Proc. A, 1965, S. 365) und I, § 1 (diese Proc. A, 1965, S. 1, 2) führen die zweidim. und linearen Segmentfunktionen zu beschränkt- und σ-additiven Mengenfunktionen Φ, Φ', Φ'' für die Mengen des Körpers K in R_2 [mit Basis K_0 (IV, § 20)] und der Körper K' [mit Basis K'_0 (I, § 1)] in R'_1 bzw. K'' [mit Basis K''_0 (I, § 1)] in R''_1. Die zugehörigen positiven, negativen und totalen Variationen seien bzw. G, g, T bzw. G', g', T' bzw. G'', g'', T''; diese Mengenfunktionen sind ebenfalls endlich, beschränkt- und σ-additiv für K bzw. K' bzw. K'', wobei sich die folgenden Relationen für die zweidim. (offenen) Intervalle (i) ableiten lassen:

$$\Phi(i) = \Phi'(i') \cdot \Phi''(i'') = G(i) + g(i);$$
$$G(i) = G'(i') \cdot G''(i'') + g'(i') \cdot g''(i'');$$
$$g(i) = G'(i') \cdot g''(i'') + g'(i') \cdot G''(i'');$$
$$T(i) = G(i) + |g|(i) = T'(i') \cdot T''(i'').$$

Die hier folgenden Theoreme im Sinne von Fubini beziehen sich hauptsächlich auf den Fall von Integration in bezug auf T (oder, was auf dasselbe hinauskommt, in bezug auf nicht-negatives Φ). Mit obigen Formeln aus den Theoremen, insbes. Theorem 68^{bis} oder 68^{ter}, ableitbare Behauptungen bei Φ von zweierlei Zeichen enthalten im allgemeinen weniger übersichtliche Bedingungen (siehe dennoch bei LS-Integration die Bemerkung in § 62).

§ 59. Das Verfahren, welches in $\mathrm{V^a}$, § 30 (diese Proc. A, 1965, S. 706–

708) zu dem dort bewiesenen Satz führte, liefert, leicht verallgemeinert, den folgenden

Hilfssatz (mit Konstruktionsangaben der zugehörigen Zerlegungen): Bei einer Menge E_0 von endlich vielen *Trennungslinien* $x=x_j$, mit $a=x_0<$ $<x_1<\dots<x_{n-1}<x_n=b$, und $y=y_k$, mit $c=y_0<y_1<\dots<y_{m-1}<y_m=d$, des Segmentes $\bar{i}_0 \equiv \bar{i}_0[a, b; c, d]$, einer in (a, b) überall dichten Menge N_x und einer in (c, d) überall dichten Menge N_y, und einer Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ gibt es *zwei* Zerlegungen $\mathfrak{Z}^{(1)}$, $\mathfrak{Z}^{(2)}$ von i_0 in endlich viele Intervalle $u_1{}^{(l)}, \dots, u_j{}^{(l)}, \dots, u_{\nu(l)}^{(l)}$ $(l=1$ bzw. $2)$ von folgender Beschaffenheit: [157])

1° $u_i{}^{(l)} \cdot u_j{}^{(l)} = 0$ $(i \neq j)$.

2° $\sum\limits_{j=1}^{\nu(l)} \bar{u}_j{}^{(l)} = \bar{i}_0$.

3° Zu jedem linearen Intervall $i_{1,j} \equiv (x=x_j; c<y<d)$ (x_j wie oben) und *einer zugehörigen Riemann-Klasse* $\mathfrak{A}^{(l)}[i_{1,j}]$ (*l wie oben*), *deren (zweidim.) Umgebungen für die Punkte von* $\bar{i}_{1,j}$ *Teil der korrespondierenden, zu* $\mathfrak{A}[i_0]$ *gehörenden Umgebungen dieser Punkte sind*, gibt es auf dem Segment $\bar{i}_{1,j}$ Punkte, welche in gleicher Weise mit den $\mathfrak{A}^{(l)}[i_{1,j}]$, den y_k und N_y zusammenhängen wie auf S. 706 von V[a] (diese Proc. A, 1965) durch die Ungleichheitsrelationen für die y-Koordinaten von dort näher charakterisierten Punkten von $\bar{l}(x_j)$ in bezug auf, den Punkten von $\bar{l}(x_j)$ zugewiesene, Umgebungen aus $\mathfrak{A}[i_0]$ und die y_k, N_y angegeben; es wird deutlich sein daß es für beide so erhaltenen Zerlegungen von $\bar{i}_{1,j}$ solche (gemeinsamen) h_j, h'_j gibt, daß auch die zweidim. Intervalle, deren Punkte x-Koordinaten zwischen x_j-h_j und $x_j+h'_j$ (mit allen x_j-h_j, $x_j+h'_j \in N_x$ bis auf x_0-h_0 und $x_n+h'_n$), und dieselben y-Koordinaten wie die Punkte der zugehörigen linearen Zerlegungsintervalle auf $\bar{i}_{1,j}$ haben, in einem korrespondierenden $i \in \mathfrak{A}^{(l)}[i_{1,j}]$ und umsomehr $\in \mathfrak{A}[i_0]$ liegen. Die so in beiden Fällen ($l=1$ oder 2) hervorgehenden Zerlegungsintervalle bilden jedesmal denselben Vertikalstreifen $(x_j-h_j, x_j+h'_j; c, d)$ bei $j=1, \dots, n-1$; bei $j=0$ ist der Streifen von Zerlegungsintervallen $(a, a+h'_0; c, d)$, bei $j=n$ $(b-h_n, b; c, d)$ zu nehmen. Die h_j, h'_j sind derartig klein zu wählen, daß die Streifen keine gemeinsamen inneren- oder Randpunkte haben. Die erhaltenen Zerlegungsintervalle und -Vertikalstreifen ($j=0, 1, \dots, n$) [157bis]) werden in der weiteren Konstruktion der beiden Zerlegungen von i_0 noch einer (für $l=1, 2$) selben geringfügigen Einschränkung in horizontaler Richtung unterworfen.

4° Die Konstruktion von Horizontalstreifen, welche die beiden, unter 3° erhaltenen Teilzerlegungen von i_0 vervollständigen, geschieht in der-

[157]) Randpunkte von Zerlegungsintervallen werden dabei vernachlässigt. Jede Zerlegung $\mathfrak{Z}^{(j)}$ hat in bezug auf $\mathfrak{A}[i_0]$, N_x, N_y dieselben Eigenschaften wie die Zerlegung im Satze von V[a], § 30, wie sich im weiteren Verlauf zeigen wird.

[157bis]) Selbstverständlich ist es möglich daß es Werte (j) gibt, für die sowohl die Riemann-Klassen $\mathfrak{A}^{(1)}[i_{1,j}]$ und $\mathfrak{A}^{(2)}[i_{1,j}]$ wie die zugehörigen Zerlegungsintervalle von $(x_j-h_j, x_j+h_j'; c, d)$ dieselben sind.

selben Weise wie in V[a], S. 707, 708; für jedes Zerlegungsintervall $u(x', x''; y', y'')$ gehören x', x'', $\neq a$ und $\neq b$, zu N_x, y', y'', $\neq c$ und $\neq d$, zu N_y.

Das Resultat ist also: *Die Zerlegungen* $\mathfrak{Z}^{(1)}$, $\mathfrak{Z}^{(2)}$ *unterscheiden sich höchstens in Zerlegungsintervallen, welche in für beide gleichen, mit den Trennungslinien* $x = x_j$ $(j = 0, \ldots, n)$ *korrespondierenden Vertikalstreifen enthalten sind.*

§ 60. Theorem 68 (Fubini; erster Teil). Hat die in $i_0 \equiv i_0\ (a, b; c, d) \in R_2$ endlichwertige Funktion $f(x, y)$ daselbst ein allgemeines Riemann-Integral in bezug auf $T = T' \cdot T''$ (siehe die Einleitung), so existiert in den Punkten $(\bar{x})$ von $i'_0 \equiv i'_0\ (a, b)$, diejenigen einer Teilmenge H mit $\mu_{a,T'}(H) = 0$ [158]) ausgenommen, das allgemeine Riemann-Integral in bezug auf T'' von $f(\bar{x}, y)$ über $i''_{\bar{x}} \equiv i''\ (x = \bar{x}; c < y < d)$:

$$\int_{i''_{\bar{x}}} (\text{allg. } R)\ f(\bar{x}, y)\, dT''.$$

Beweis. Setzen wir $\mu_{a,T'}(H) > 0$ voraus; H_1 sei die Teilmenge von H, in deren Punkten $(\bar{x})$ $\overline{\int}_{i''_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y)\ dT''$ und $\underline{\int}_{i''_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y)\ dT''$ existieren, und ungleich sind; in den Punkten von $H_2 = H - H_1$ gibt es unter den unteren und oberen Grenzen, welche, bei gleichzeitiger Endlichkeit, $\overline{\int}$ bzw. $\underline{\int}$ definieren (nach II, § 4, Def.), mindestens eine gleich $+\infty$ oder $-\infty$. Aus

$$\mu_{a,T'}(H) \leqq \mu_{a,T'}(H_1) + \mu_{a,T'}(H_2) \quad \text{(II, § 5, Theorem 7)}$$

folgt daß entweder $\mu_{a,T'}(H_1)$ oder $\mu_{a,T'}(H_2)$ oder beide positiv sind.

Betrachten wir $\mu_{a,T'}(H_1) = \eta > 0$. Nach II, § 6, Theorem 8 gibt es dann eine natürliche Zahl ν so daß für die Teilmenge G_ν von H_1, in deren Punkten $(\bar{x})$

$$\overline{\int}_{i''_{\bar{x}}} f\,(\bar{x}, y)\ dT'' - \underline{\int}_{i''_{\bar{x}}} f\,(\bar{x}, y)\ dT'' > \frac{1}{\nu} \tag{187}$$

ist, gilt

$$\mu_{a,T'}(G_\nu) > \tfrac{1}{2}\eta. \tag{188}$$

Wir führen ein ε ein mit

$$0 < \varepsilon < \frac{1}{\nu} \cdot \tfrac{1}{2}\eta. \tag{189}$$

Dann folgt aus der Existenz von $\int_{i_0} f\,(x, y)\, dT$ daß es eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ und eine Menge $E_0 \equiv E'_0 + E''_0$ von endlich vielen Trennungslinien für i_0 in bezug auf T, mit den Linien von E'_0 parallel zur x-Achse, die von E''_0 parallel zur y-Achse, gibt so daß für die Werte der im allgemeinen mehrwertigen Riemann-Summe für f: $F[f; \{\mathfrak{A}[i_0], E_0; T\}]$ (V[a], § 30, Def. b_1) gilt

$$\left| \int_{i_0} (\text{allg. } R)\, f\, dT - F[f; \{\mathfrak{A}[i_0], E_0; T\}] \right| < \varepsilon/2 \quad (\text{V}^{\text{a}}, \text{ § 30, Def. } c_1). \tag{190}$$

Aus (187) und den Definitionen der oberen und unteren Integrale in R_1

---

[158]) Siehe die Definition des allgemeinen äußeren T-Maßes in R_1 in Teil II, § 4 (diese Proc. A, 1965).

(II, § 4) folgt für jedes $\bar{x} \in G_\nu$, bei $\mathfrak{A}[i_{\bar{x}}'']$ eine Riemann-Klasse, welche den Punkten $(\bar{x}, y)$ des Segmentes $i_{\bar{x}}''$ lineare Umgebungen zuordnet, welche in den zweidim. mittels $\mathfrak{A}[i_0]$ (in (190)) diesen Punkten zugewiesenen Umgebungen liegen, daß es zwei zugehörige Zerlegungen [159]) von $i_{\bar{x}}''$ und zugehörige Werte $F_{\bar{x}}^{(1)}$, $F_{\bar{x}}^{(2)}$ der Riemann-Summe

$$F[f(\bar{x}, y); \{\mathfrak{A}[i_{\bar{x}}''], E_{\bar{x}}; T''\}],$$

wobei $E_{\bar{x}}$ die Menge der endlich vielen Schnittpunkte von $i_{\bar{x}}''$ mit den Parallelen zur y-Achse in E''_0 ($\subseteqq E_0$), gibt mit Differenz

$$F_{\bar{x}}^{(1)} - F_{\bar{x}}^{(2)} > \frac{1}{\nu}. \tag{191}$$

Da die beiden Zerlegungen nur endlich viele (lineare) Zerlegungsintervalle haben, folgt daß es positive $h'(\bar{x})$, $h''(\bar{x})$ gibt so daß $x = \bar{x} - h'(\bar{x})$, $x = \bar{x} + h''(\bar{x})$ keine Trennungslinien in bezug auf T sind, und daß sowohl die erste wie die zweite Zerlegung von $i_{\bar{x}}''$ zu einer korrespondierenden Zerlegung des Vertikalstreifens $(\bar{x} - h'(\bar{x}), \bar{x} + h''(\bar{x}); c, d)$ führt, deren zweidim. Zerlegungsintervalle in bestimmten zu $\mathfrak{A}[i_0]$ gehörenden Umgebungen von Punkten von $i_{\bar{x}}''$ liegen (vergl. auch 3° des Hilfssatzes von § 59). Dies bleibt der Fall bei passender Verkleinerung der dabei positiv bleibenden $h'(\bar{x})$, $h''(\bar{x})$.

Zu $i'_0 \equiv i'_0(a, b)$ betrachten wir eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i'_0]$, wobei jedem Punkte $\bar{x} \in G_\nu$ die Umgebung $(\bar{x} - h'(\bar{x}), \bar{x} + h''(\bar{x}))$ zugewiesen sein soll, während zu jedem Punkte $\bar{x} \in (E'_0)_x$[160]$) - G_\nu$ eine analoge Umgebung $(\bar{x} - h'(\bar{x}), \bar{x} + h''(\bar{x}))$ zugewiesen sei mit *einer* Teilung des zugehörigen Vertikalstreifens in Zerlegungsintervallen von derselben Art wie die der beiden den Punkten von G_ν zugewiesenen Teilungen; [160bis]) die Wahl der Umgebungen der übrigen Punkte von i'_0 sei frei. Aus (188) und der Definition in II, § 4 des äußeren Maßes folgt dann daß es eine zugehörige Zerlegung von i'_0 gibt mit einem speziellen Wert der Riemann-Summe $F[c_{G_\nu}; \{\mathfrak{A}[i'_0], (E'_0)_x$[160]$); T'\}]$, größer als $\frac{1}{2}\eta$. Jedes Zerlegungsintervall $(\bar{x} - k'(\bar{x}), \bar{x} + k''(\bar{x}))$, für diesen speziellen F-Wert gehörend zu einem Punkte $\bar{x} \in G_\nu$, liegt im zugehörigen $(\bar{x} - h'(\bar{x}), \bar{x} + h''(\bar{x}))$; das Zerlegungsintervall korrespondiert mit einem Vertikalstreifen, welcher Teil des Vertikalstreifens $(\bar{x} - h'(\bar{x}), \bar{x} + h''(\bar{x}); c, d)$ ist; der neue Streifen enthält zwei Zerlegungen, korrespondierend mit denen von $(\bar{x} - h'(\bar{x}), \bar{x} + h''(\bar{x}); c, d)$; die Zerlegungsintervalle sind wieder der Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ „zugeordnet" (vgl. vorigen Absatz). Mit (191) und (189) folgt für die sämtlichen Zerlegungsintervalle der ersten bzw. der zweiten Zerlegungen der zu Punkten von G_ν gehörenden Zerlegungsintervalle von i'_0:

$$\sum_{(\bar{x})} [F_{\bar{x}}^{(1)} - F_{\bar{x}}^{(2)}] \cdot T'[(\bar{x} - k'(\bar{x}), \bar{x} + k''(\bar{x}))] > \frac{1}{\nu} \cdot \tfrac{1}{2}\eta > \varepsilon. \tag{192}$$

---

[159]) Die Endpunkte eines Zerlegungsintervalls liegen dabei nicht auf Trennungslinien in i_0 in bezug auf T und parallel zur x-Achse.

[160]) Gemeint wird die Menge der x-Koordinaten der Punkte in E'_0.

[160bis]) Nur (191) fehlt hier.

Wir sind in eine Situation gelangt wo sich der Hilfssatz von § 59 anwenden läßt; als Trennungslinien $x=x_j$ $(j=1,\ldots,n-1)$ und $y=y_k$ $(k=1,\ldots,m-1)$ des Hilfssatzes nehme man dabei die Linien von E'_0 zusammen mit den Parallelen zur y-Achse durch die endlich vielen Punkte $(\bar{x})\in G_\nu$ der Zerlegung von i'_0 bzw. die Linien von E''_0; für N_x und N_y nehme man die Punkte von (a, b) bzw. (c, d), durch welche keine Trennungslinien in bezug auf T gehen. Beide „teilweise" Zerlegungen von i_0 lassen sich in einer für beide gleichen Weise [161]) ändern in $\mathfrak{A}[i_0]$-Zerlegungen von i_0, bei denen die zugehörigen speziellen Werte der Riemann-Summe $F[f; \{\mathfrak{A}[i_0], E_0; T\}]$ wegen (192), mit Fußn. 161, eine Differenz $>\varepsilon$ erhalten im Widerspruch mit (190).

Ist $\mu_{a,T'}(H_2)>0$, so ändern wir die Bedeutung von η: $0<\frac{1}{2}\eta<\mu_{a,T'}(H_2)$, nehmen die natürliche Zahl ν willkürlich an, und fügen ein ε hinzu, welches sodann wieder (189) erfüllen soll. Aus der Existenz von $\int_{i_0}$ (allg. R) $f\,dT$ läßt sich dann wieder für eine zugehörige Riemann-Summe $F[f; \{\mathfrak{A}[i_0], E_0; T\}]$ die Gültigkeit von (190) folgern.

Für jeden Punkt $\bar{x}\in H_2$ und $\mathfrak{A}[i_{\bar{x}}''(c, d)]$ eine Riemann-Klasse, welche den Punkten $(\bar{x}, y)$ des Segmentes $i_{\bar{x}}''$ lineare Umgebungen, liegend in den zweidim. Umgebungen von $\mathfrak{A}[i_0]$ (in (190)), zuordnet, gibt es bei der gewählten Zahl ν zwei zugehörige Zerlegungen von $i_{\bar{x}}''$ und zugehörige Werte $F_{\bar{x}}^{(1)}$, $F_{\bar{x}}^{(2)}$ der Riemann-Summe

$$F[f(\bar{x}, y); \{\mathfrak{A}[i_{\bar{x}}''], E_{\bar{x}}; T''\}],$$

welche (191) erfüllen. Die der Ungleichung (191) folgenden Betrachtungen des zugehörigen Absatzes und die der beiden folgenden Absätze lassen sich in sinngemäßer Weise auf diesen Fall übertragen, und führen wieder zu einem Widerspruch.

§ 61. Theorem 68[bis]. (Fubini; zweiter Teil). Hat die in $i_0\equiv i_0(a, b; c, d)\in R_2$ endlichwertige Funktion $f(x, y)$ daselbst ein allgemeines Riemann-Integral in bezug auf T, und existieren für jedes $\bar{x}\in i_0'\equiv i_0'(a, b)$ $\overline{\int}_{i_{\bar{x}}''} f(\bar{x}, y)\,dT''$ und $\underline{\int}_{i_{\bar{x}}''} f(\bar{x}, y)\,dT''$, so ist eine Funktion $\mathfrak{F}(\bar{x})$, gleich $\overline{\int} f(\bar{x}, y)\,dT''$ in den Punkten $(\bar{x})$ einer willkürlich gewählten Teilmenge von i_0', und gleich $\underline{\int} f(\bar{x}, y)\,dT''$ in den übrigen Punkten $(\bar{x})$ von i_0', endlichwertig mit einem allgemeinen R-Integral in bezug auf T' über i'_0, wobei immer:

$$\int_{i_0} (\text{allg. } R)\, f\,dT = \int_{i_0'} (\text{allg. } R)\, \mathfrak{F}(\bar{x})\,dT'.$$

Beweis. Zu $\varepsilon>0$ gibt es eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ und eine Menge $E_0\equiv E_0'+E_0''$ von endlich vielen Trennungslinien für i_0 in bezug auf T,

---

161) Man beachte noch die Vertikalstreifen für $x=a$ und $x=b$; außerdem daß in diesem Spezialfall die im Hilfssatz unter 3° (und 4°) angedeuteten Einschränkungen (also Verkleinerungen von $k'(\bar{x}), k''(\bar{x})$) immer so gewählt werden können daß die Relation (192) erhalten bleibt.

mit den Linien von E_0' parallel zur x-Achse, die von E_0'' parallel zur y-Achse, so daß für die Werte der im allgemeinen mehrwertigen Riemann-Summe für f: $F[f; \{\mathfrak{A}[i_0], E_0; T\}]$ (V^a, § 30, Def. b_1) gilt

$$(190) \qquad |\int_{i_0} f\, dT - F[f; \{\mathfrak{A}[i_0], E_0; T\}]| < \varepsilon \text{ (V}^a\text{, § 30, Def. } c_1\text{)}.$$

Für den Punkt $\bar{x} \in i_0'$ sei $\mathfrak{F}(\bar{x}) = \overline{\int}_{i''_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y)\, dT''$. Bei $\eta > 0$, einer Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_{\bar{x}}'']$, welche den Punkten $(\bar{x}, y)$ von $i_{\bar{x}}''$ lineare Umgebungen, die in den zweidim. mittels $\mathfrak{A}[i_0]$ diesen Punkten zugewiesenen Umgebungen liegen, zuordnet, und $E_{\bar{x}}$ die Menge der endlich vielen Schnittpunkte von $i_{\bar{x}}''$ mit den Parallelen zur y-Achse in E''_0 gibt es dann, nach der Definition des oberen Integrals in R_1 (II, § 4), einen Wert $F_{\bar{x}}$ der Riemann-Summe $F[f(\bar{x}, y); \{\mathfrak{A}[i_{\bar{x}}''], E_{\bar{x}}; T''\}]$ mit

$$(193) \qquad \eta > F_{\bar{x}} - \overline{\int}_{i''_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y)\, dT'' > -\eta.$$

Da die zu $F_{\bar{x}}$ gehörige Zerlegung nur endlich viele (lineare) Zerlegungsintervalle hat, folgt daß es positive $h'(\bar{x}), h''(\bar{x})$ gibt so daß $x = \bar{x} - h'(\bar{x})$, $x = \bar{x} + h''(\bar{x})$ keine Trennungslinien in bezug auf T sind, und daß der Vertikalstreifen $(\bar{x} - h'(\bar{x}),\ \bar{x} + h''(\bar{x}); c, d)$ eine mit der zu $F_{\bar{x}}$ gehörigen linearen Zerlegung korrespondierende Zerlegung in zweidim. Zerlegungsintervalle, welche in bestimmten zu $\mathfrak{A}[i_0]$ gehörenden Umgebungen von Punkten von $i_{\bar{x}}''$ liegen, zuläßt (vergl. auch 3° im Hilfssatz von § 59). Aus (193) folgt:

$$(194) \qquad |\mathfrak{F}(\bar{x}) \cdot T'[(\bar{x} - h'(\bar{x}), \bar{x} + h''(\bar{x})] - F_{\bar{x}} \cdot T''[(\bar{x} - h'(\bar{x}), \bar{x} + h''(\bar{x})]| < \eta \cdot \\ \cdot T'[---],$$

was auch bei passender Einschränkung von $(\bar{x} - h'(\bar{x}),\ \bar{x} + h''(\bar{x}))$ der Fall bleibt.

Ist in $\bar{x}$ $\mathfrak{F}(\bar{x}) = \underline{\int}_{i''_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y)\, dT''$, so hat man eine mit (193) analoge Relation:

$$(193^{\text{bis}}) \qquad \eta > \underline{\int}_{i''_{\bar{x}}} f(\bar{x}, y)\, dT'' - F_{\bar{x}} > -\eta,$$

mit zugehörigem Vertikalstreifen und einer Relation wie (194).

Zu $x = a$, $x = b$ gibt es Vertikalstreifen $(a - h'(a), a + h''(a); c, d)$ bzw. $(b - h'(b), b + h''(b); c, d)$ aufgebaut aus bestimmten Punkten von i_a'' bzw. i_b'' zugeordneten Intervallen, welche liegen innerhalb durch $\mathfrak{A}[i_0]$ mit diesen Punkten korrespondierender Intervalle.

Die Intervalle $(a - h'(a), a + h''(a))$, $(\bar{x} - h'(\bar{x}), \bar{x} + h''(\bar{x}))$ für jedes $\bar{x} \in i_0' \equiv$ $\equiv i_0'$ (a, b), und $(b - h'(b), b + h''(b))$ bilden eine Riemann-Klasse $\mathfrak{A}(i'_0)$. Für jeden Wert der Riemann-Summe $F[\mathfrak{F}(\bar{x}); \{\mathfrak{A}(i_0'), (E'_0)_x{}^{160}); T'\}]$ gibt es nun einen korrespondierenden Wert der Summe $F[f; \{\mathfrak{A}[i_0], E_0; T\}]$, wobei die Differenz dieser beiden Werte, wegen (194) und weiterer derartigen Ungleichheiten, kleiner als $\eta \cdot T'[i_0']$ ist. Mit (190) folgt dadurch

$$|F[\mathfrak{F}(\bar{x}); \{\mathfrak{A}(i_0'), (E_0')_x; T'\}] - \int_{i_0} (\text{allg. } R)\, f\, dT| < \eta \cdot T'[i_0'] + \varepsilon,$$

was zu dem in Theorem 68$^{\text{bis}}$ gewünschten Resultat führt.

Theorem 68^ter. (Fubini; dritter Teil). Hat die in $i_0 \equiv i_0\,(a, b; c, d) \in R_2$ endlichwertige Funktion $f(x, y)$ daselbst ein allgemeines Riemann-Integral in bezug auf $T = T' \cdot T''$, so existiert für die in $i_0' \equiv i_0'(a, b)$ definierte Funktion $\mathfrak{F}_1(\bar{x})$, gleich $\int_{i_{\bar{x}}''}$ (allg. R) $f\,(\bar{x}, y)\, dT''$ in den Punkten $(\bar{x})$, in welchen dieses Integral existiert, und gleich Null in den übrigen Punkten von i_0', ein allgemeines R-Integral über i_0' in bezug auf T, mit

$$\int_{i_0'} \text{(allg. } R)\; \mathfrak{F}_1\,(\bar{x})\, dT' = \int_{i_0} \text{(allg. } R)\; f\,(x, y)\, dT. \tag{195}$$

Beweis. Nach Theorem 68 ist für die Teilmenge H von i_0', in deren Punkten $(\bar{x})$ $\int_{i_{\bar{x}}''}$ (allg. R) $f\,(\bar{x}, y)\, dT''$ nicht existiert, $\mu_{a,T'}(H) = 0$, somit auch $m_{a,T'}(H) = 0$ [nach Teil VII, § 47 (diese Proc. A, 1967)]. Daraus folgt für die Teilmenge H_0 von i_0, mit $(\bar{x}, y) \in H_0$ für $\bar{x} \in H$ und $c < y < d$, ebenfalls $m_{a,T}(H_0) = 0$, also auch $\mu_{a,T}(H_0) = 0$ [nach VII^bis, § 54 (diese Proc. A, 1967)]. Die Funktion f_0, gleich f in den Punkten von $i_0 - H_0$ und gleich Null in den Punkten von H_0, hat dann auch ein allg. R-Integral i.b.a. T, mit

$$\int_{i_0} \text{(allg. } R)\; f_0\, dT = \int_{i_0} \text{(allg. } R)\; f\, dT, \tag{196}$$

wie aus V^c, § 38, Folgerung (diese Proc. A, 1965) hervorgeht.

Auf f_0 läßt sich nun Theorem 68^bis anwenden; das liefert

$$\begin{aligned} \int_{i_0} \text{(allg. } R)\; f_0\, dT &= \int_{i_0'} dT' \int_{i_{\bar{x}}''} f_0\,(\bar{x}, y)\, dT'' \\ &= \int_{i_0'} dT' \cdot \mathfrak{F}_1(\bar{x}). \end{aligned} \tag{197}$$

Aus (196) und (197) folgt (195).

Bemerkung. Für die von R. Henstock in seinem Buche: *Theory of integration* 1963 entwickelte Integrationstheorie findet man, loc. cit. S. 106, ein Theorem 44.1, das einigen Zusammenhang mit den Theoremen 68–68^ter zeigt. Der Beweis fordert Ergänzung, da, loc. cit. S. 109 oben, die Existenz des Integrals von $J(x)$ nicht ohnemehr aus den vorgeführten Betrachtungen folgt; der Einfluß der Punkte $x \in X$ wird nicht beachtet.

§ 62. Anwendungen. *A*. Bei i_0, i_0', $i_{\bar{x}}''$ und T, T', T'' wie in Theorem 68 sei E eine Teilmenge von i_0 mit Maß μ_T. Dann ist

$$\mu_T(E) = \int_{i_0'} (LS)\; d\mu_{T'} \cdot \mu_{T''}(i_{\bar{x}}'' \cdot E),$$

wobei der Integrand in den Punkten $(\bar{x})$ von i_0', in welchen $\mu_{T''}(i_{\bar{x}}'' \cdot E)$ nicht existiert, gleich Null zu nehmen ist.

Beweis. Man hat nacheinander:

$$\begin{aligned} \mu_T(E) &= (\text{V}^{\text{b}},\ \S\ 35 \text{ mit IV}^{\text{bis}},\ \S\ 25)\ \int_{i_0} \text{(allg. } R)\; dT \cdot c_E(x, y) = \\ &= (\text{Th. } 68^{\text{ter}})\ \int_{i_0'} \text{(allg. } R)\; dT' \int_{i_{\bar{x}}''} \text{(allg. } R)\; dT'' \cdot c_E(\bar{x}, y)\,^{162)} = \\ &= (\text{II},\ \S\ 4;\ \text{II}^{\text{bis}},\ \S\ 12,\ \text{Th. } 18^{\text{b}})\ \int_{i_0'} (LS)\; d\mu_{T'} \cdot \mu_{T''}[i_{\bar{x}}'' \cdot E]. \end{aligned}$$

[162] Das Integral über $i_{\bar{x}}''$ durch Null zu ersetzen wo es nicht existiert.

B. Bei i_0, i_0', $i_{\bar{x}}''$ und T, T', T'' wie im Theorem 68 sei $f(x, y)$ *LS*-integrierbar in bezug auf T über i_0. Dann ist

$$\int_{i_0} (LS)\, f(x, y)\, d\mu_T = \int_{i_0'} (LS)\, d\mu_{T'} \int_{i_{\bar{x}}''} (LS)\, f(\bar{x}, y)\, d\mu_{T''};$$

dabei ist $\int_{i_{\bar{x}}''} (LS)\, f(\bar{x}, y)\, d\mu_{T''}$ in den Punkten $(\bar{x})$ von i_0', in welchen dieses Integral nicht existiert, gleich Null zu nehmen.

Beweis. Mit *A* folgt daß wir f als endlichwertig betrachten dürfen. Man hat:

$\int_{i_0} (LS)\, f(x, y)\, d\mu_T = \int_{i_0} (LS)\, f^+\, d\mu_T - \int_{i_0} (LS)\, f^-\, d\mu_T =$ ($\mathrm{V^c}$, § 41, Th. 57)
$\int_{i_0}$ (allg. R) $f^+\, dT - \int_{i_0}$ (allg. R) $f^-\, dT =$ (Theorem 68[ter])
$\int_{i_0'}$ (allg. R) $dT' \int_{i_{\bar{x}}''}$ (allg. R) $f^+ (\bar{x}, y)\, dT''$ [162]) $-$ ____ $=$ ($\mathrm{II^{bis}}$, § 12, Th. 18[b])
$\int_{i_0'} (LS)\, d\mu_{T'} \int_{i_{\bar{x}}''} (LS)\, f^+ (\bar{x}, y)\, d\mu_{T''} -$ ____ $=$
$\int_{i_0'} (LS)\, d\mu_{T'} \int_{i_{\bar{x}}''} (LS)\, f(\bar{x}, y)\, d\mu_{T''}$.

Bemerkung. In der Theorie des *LS*-Integrals läßt sich zeigen: [163])
Haben Φ, Φ' und Φ'' die gleiche Bedeutung wie in der Einleitung, und existiert das *LS*-Integral von $f(x, y)$ in bezug auf m_Φ, so ist

$$\int_{i_0} (LS)\, f(x, y)\, dm_\Phi = \int_{i_0'} (LS)\, dm\ {}' \int_{i_{\bar{x}}''} (LS)\, f(\bar{x}, y)\, dm_{\Phi''},$$

wobei das Integral über $i_{\bar{x}}''$ in den Punkten $(\bar{x})$ von i_0', in welchen es nicht existiert, durch Null zu ersetzen ist.

C. Die bekannte, von G. Fichtenholz, Fund. math. **6** (1924), S. 30–36, herrührende, in (0,1; 0,1) nach Lebesgue meßbare, jedoch nicht *L*-integrierbare Funktion f, für die

$$\int_0^1 (L)\, dx \int_0^1 (L)\, dy \cdot f(x, y) = \int_0^1 (L)\, dy \int_0^1 (L)\, dx \cdot f(x, y) \tag{198}$$

ist, ist allg. *R*-integrierbar in bezug auf $T(i) \equiv |i|$, mit dem allgemeinen *R*-Integral über (0,1; 0,1) gleich den iterierten Integralen in (198). Die in den Theoremen 68, 68[ter] auftretende Ausnahmemenge ist hier leer.

Die Bemerkung 2 in IV, § 24, S. 375 (diese Proc. A, 1965) gibt eine in $i_0 \equiv i_0(-1, +1; -1, +1)$ i.b.a. $T(i) \equiv |i|$ allg. *R*-integrierbare, jedoch nicht *L*-integrierbare Funktion $g(x, y)$:

$$2x \sin \frac{1}{x^2} - \frac{2}{x} \cos \frac{1}{x^2}\ (x \neq 0, y \text{ willkürlich}),\ 0\ (x = 0, y \text{ willkürlich}),$$

mit

$$0 = \int_{i_0} (\text{allg. } R)\, g \cdot d|i| = \int_{-1}^{+1} dx \int_{-1}^{+1} dy \cdot g(x, y) = \int_{-1}^{+1} dy \int_{-1}^{+1} dx \cdot g(x, y);$$

die Integrale nach y sind dabei gewöhnliche Riemann-Integrale, die nach x sind Denjoy-Integrale.

---

[163]) Siehe unsere Arbeit in Nieuw Archief, Amsterdam (2) **19**, 1 u. 2 (1936), S. 31–39, insbes. S. 39 (Satz B*), wo die Räume sogar abstrakt sind.